CUADERNILLO MATEMÁTICAS 2º BACHILLERATO SALUD-TECNOLÓGICO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS y TIC

CPES SANTA ISABEL DE HUNGRÍA CPES SANTA CATALINA CPES NTRA. SRA. DEL PILAR

CURSO 2021/2022

INSTITUTOS DIOCESANOS DE CANARIAS

ÍNDICE:

1. LÍMITES y CONTINUIDAD 2
2. DERIVADAS y SUS APLICACIONES 3
3. INTEGRALES y SUS APLICACIONES 5
4. ÁLGEBRA 6
5. GEOMETRÍA AFÍN y EUCLIDEA 9
6. PROBABILIDAD 11
7. BINOMIAL y NORMAL 14

1. LÍMITES y CONTINUIDAD

1.- Hallar el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

2.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-8x^2+7x}{x^2-x}$ b) $\lim_{x\to \pi/2} \left(\frac{2x}{\pi}+\cos(x)\right)^{\frac{1}{\cos(x)}}$

3.- Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$$

4.- Indica, razonadamente, el valor que debe tomar *a* para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} a & \text{si } x=0 \\ \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{si } x\neq 0 \end{cases}$$

5.- Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

6.- Estúdiese, según los valores de los números reales α y β, la continuidad de la función f definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+\alpha}{1+e^{1/x}} & \text{si } x\neq 0 \\ \beta & \text{si } x=0 \end{cases}$$

7.- Hallar *a* y *b* para que *f* (*x*) sea continua en todo $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} a+x\ln x & \text{si} \quad x>0 \\ b & \text{si} \quad x=0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x} & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

2. DERIVADAS y SUS APLICACIONES

1.- Se sabe que la función $f(x)=\frac{ax^2+bx}{x}$ tiene una recta tangente horizontal en el punto $P(2,4)$. Hallar los valores de a y b.

2.- Se considera la función $f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2+1}$ y se pide:

a) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva f en el punto de abscisa $x=0$.

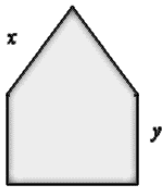
b) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

3.- Hallar los valores de los parámetros a y b para que la función siguiente sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases} ax+5 & si \quad x\leq 1 \\ a\sqrt{x}+\dfrac{b}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$$

4.- Hallar una función polinómica de tercer grado tal que tenga un extremo relativo en (1,1) y un punto de inflexión en (0,3).

5.- Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior se ha sustituido por un triángulo equilátero tal y como se muestra en la figura. Sabiendo que el perímetro de la ventana es 6.6 m, hallar sus dimensiones para que la superficie sea máxima.



6.- Dividir un segmento de 6 *cm*. de longitud en dos partes, con la propiedad de que la suma de las áreas del cuadrado y del triángulo equilátero construidos sobre ellos sea máxima.

7.- En un jardín con forma semicírculo de radio 10 m se va a instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. Calcula las dimensiones del parterre para que su área sea máxima. (HACE FALTA LA ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA $x^2+y^2=r^2$)

8.- Calcular los siguientes límites aplicando la Regla de L'Hôpital

$$\text{a)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} =$$

$$\text{b)} \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x-\operatorname{sen} x} =$$

$$\text{c)} \lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^2+2} =$$

$$\text{d)} \lim_{x\to 0^+} x\ln x =$$

$$\text{e)} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x =$$

3. INTEGRALES y SUS APLICACIONES

1.- Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $f(x) = 4 - x^2$ y la recta $g(x) = x + 2$. Previamente, debes representar la región.

2.- Resolver las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int e^{x^2-5x} \cdot (2x-5)dx =$

b) $\int \frac{1-x^3}{x^2} dx =$

c) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} dx =$

3.- Resolver la siguiente integral indefinida: $\int \frac{3x+4}{x+3} dx =$

4.- En una pared azul, se quiere pintar de blanco la figura que encierran las funciones $f(x) = 2^x$, $g(x) = -x + 1$ y $x = 1$.

Si pintar un metro cuadrado tiene un valor de 7 euros, calcular el precio del pintado completo de la figura.

5.- Una parcela está rodeada por dos carreteras cuyos trazados vienen dados por las funciones $f(x) = Sen\ x$ y $g(x) = Cos\ x$, entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$.

6.- Los barcos de pesca pertenecientes a la Comunidad Canaria, pueden ir a faenar a una región similar a la limitada por la función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ y el eje x, entre $x = \frac{3}{2}$ y $x = 6$. Si los ejes de coordenadas están tabulados en millas, calcular la superficie de pesca de la que disponen para efectuar su labor.

7.- Resolver las siguientes integrales indefinidas:

$$\int (3x^2 - 3)\, Sen(x^3 - 3x)\, dx =$$

$$\int Cos(2x)\ dx =$$

$$\int (1 + tg^2(3x))\ dx =$$

4. ÁLGEBRA

1.- **a)** Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los distintos valores del parámetro m:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (m+1)y + mz = m + 1 \end{cases}$$

b) Resolverlo, si es posible, para $m = 0$.

2.- En la matriz A, estudia para que valores del parámetro m, la matriz tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula, si es posible, la matriz inversa para $m = 2$.

3.- Resuelve la siguiente ecuación matricial: $\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4.- **a)** Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los distintos valores del parámetro m:

$$\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$$

b) Resolverlo, si es posible, para $m = 2$.

5.- Resuelve la siguiente ecuación matricial: $\boldsymbol{XA} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.- En la matriz A, estudia para que valores del parámetro m, la matriz tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -3 \\ 4 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Calcula, si es posible, la matriz inversa para $m = 2$.

7.- Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro k y resuélvelo en los casos que sea posible:

$$\begin{cases} 6x + 2y + 2z = 6 \\ kx + 2y + z = k \\ 5x + 3y + kz = 5 \end{cases}$$

8.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, resuelve la ecuación:

$$BX = A + 3I$$

9.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix}$ se pide:

Razonar para qué valores de k la matriz B^tA^t tiene inversa.

10.- a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los distintos valores del parámetro m:

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - 2y + 2z = m \\ 3x - y + mz = 4 \end{cases}$$

b) Resolverlo en los casos que sea posible.

11.- Resuelve la siguiente ecuación matricial: $\boldsymbol{XA} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, sabiendo que $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

12.- a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones según los distintos valores del parámetro m:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$$

b) Resolverlo en los casos que sea posible.

13.- Resuelve la siguiente ecuación matricial: $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$, sabiendo que $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

14.- Resolver la ecuación matricial A·X = C, siendo A y C las siguientes matrices cuadradas de dimensión 2:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

15.- a) Teniendo en cuenta el parámetro **m**, discute el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + my + z = 2 \\ -x + my - z = 0 \\ mx + y + z = 2m \end{cases}$$

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

16.- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$

a) Halla el valor de m para que la matriz A no tenga inversa.

b) Halla la inversa de A cuando $m = 2$.

5. GEOMETRÍA AFÍN y EUCLIDEA

1.- Teniendo en cuenta los siguientes puntos $A(1,2,3)$, $B(-2,4,3)$ y $C(0,-4,2)$. Responde a los siguientes apartados:

a) ¿Están los puntos alineados?

b) Hallar la ecuación implícita de la recta **r**, que pasa por el punto C y es paralela al vector $\overrightarrow{AB}$.

c) Hallar la ecuación general del plano, perpendicular a **r** (*apartado anterior*) y que pasa por el origen de coordenadas.

2.- a) Halla la posición relativa de la recta y el plano siguientes:

$$s \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \pi \equiv x + y - 2 = 0$$

b) Halla la posición relativa de la recta **s** (*apartado anterior*) y la recta **r** siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

3.- Teniendo en cuenta los siguientes puntos $A(1,2,3)$, $B(-2,4,3)$ y $C(0,-4,2)$. Responde a los siguientes apartados:

b) Hallar la ecuación implícita de la recta **r**, que pasa por el punto C y es paralela al vector $\overrightarrow{AB}$.

c) Hallar la ecuación general del plano, perpendicular al vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ y que pasa por el punto B.

4.- a) Halla la posición relativa de los tres planos siguientes:

$$\pi_1 \equiv x - 2y + z - 3 = 0$$

$$\pi_2 \equiv 2x + y + 4z - 1 = 0$$

$$\pi_3 \equiv -2x + 4y - 2z + 6 = 0$$

b) Halla la posición relativa de la rectas **r** y **s**:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -3 - t \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$$

5.- Hallar la ecuación en forma continua de la recta que pasa por el punto P(1,2,3); y es paralela a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

6.- Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π siguientes:

$$r \equiv \frac{x-1}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{0}; \quad \pi \equiv 5x - 7y = -3$$

7.- Teniendo en cuenta los siguientes puntos $A(1,-2,3)$, $B(-2,4,3)$ y $C(0,4,2)$. Responde a los siguientes apartados:

a) Hallar la ecuación implícita de la recta **r**, que pasa por el punto C y es paralela al vector $\overrightarrow{AB}$.

b) Hallar la ecuación general del plano que contenga a los tres puntos.

8.- Halla la posición relativa de la recta **s** y la recta **r**.

$$s \equiv \begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x - z + 5 = 0 \end{cases} \qquad r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

6. PROBABILIDAD

1.- Se ha agrupado una población para su estudio en tres categorías:
A = niño; *B* = adulto; *C* = anciano, según su edad.
Se sabe que el 25% del total son niños, el 55% son adultos y el resto son ancianos. El estudio dio como resultado que la incidencia de la gripe en niños es de un 40 %, en adultos es de un 35% y en ancianos de un 60%. Calcule:

a) Entre las personas que tienen gripe, ¿qué probabilidad existe de que sea anciano?

b) ¿Qué probabilidad tiene cualquier persona de la población de no tener gripe?

c) Entre las personas sanas, ¿qué probabilidad existe de que sean niños?

2.- Se sortea una entrada para un parque de atracciones entre los 80 miembros de un club. De ellos, 12 son rubios, 16 llevan gafas, y 10 son rubios y llevan gafas.

a) Calcula la probabilidad de que le toque la entrada a alguien que no sea rubio y no lleve gafas.

b) Si al que le toca es rubio, ¿cuál es la probabilidad de que no lleve gafas?

c) Los sucesos *Ser Rubio* y *No Llevar Gafas*, ¿Son independientes?

3.- Antes de acabar el curso una profesora hace una encuesta sobre las vacaciones de sus alumnos. El 30% responde que harán turismo en la propia autonomía, desplazándose el 70% en coche y el 30% en tren. Un 45% viajará a otras autonomías del Estado, desplazándose el 60% en coche, el 30 % en tren y el resto en avión. Los restantes saldrán al extranjero, desplazándose el 60% en avión, el 30% en coche y el resto en tren. Si elegimos un alumno o alumna al azar, calcular:

a) Probabilidad de que haya elegido desplazarse en coche o en avión.

b) Si se va a desplazar en avión, probabilidad de que no haya elegido ir al extranjero.

4.- En una fábrica se embalan cajas de galletas en tres cadenas de montaje diferentes: A, B y C. El 35% de la producción total se embala en A, el 25% en B y el resto en C. Los datos indican que no se embala correctamente un 1% en A, un 0.3% en B y un 2.5% en C.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja elegida al azar sea defectuosa?

b) Y si no era defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que fuera embalada en la cadena de montaje C?

5.- En una ciudad, el 25% de las personas que acceden a un centro comercial proceden del centro de la ciudad, el 45% de barrios periféricos y el resto de pueblos cercanos. Respectivamente, efectúan compras el 75%, el 60% y el 50%.

a) Dibujar el árbol de probabilidades.

b) Si un determinado día acceden al centro comercial 2000 personas, ¿cuál es el número esperado de visitantes que no realizan compras?

c) Sabiendo que el visitante ha comprado, ¿Cuál es la probabilidad de que procedan de barrios periféricos?

6.- Se ha agrupado una población para su estudio en tres categorías:
A = niño; *B* = adulto; *C* = anciano, según su edad.
Se sabe que el 25% del total son niños, el 55% son adultos y el resto son ancianos. El estudio dio como resultado que la incidencia de la gripe en niños es de un 40 %, en adultos es de un 35% y en ancianos de un 60%. Calcule:
a) Entre las personas que tienen gripe, ¿qué probabilidad existe de que sea anciano?

b) ¿Qué probabilidad tiene cualquier persona de la población de no tener gripe?

c) Entre las personas sanas, ¿qué probabilidad existe de que sean niños?

7.- En una casa hay tres llaveros A, B y C; el primero con cinco llaves, el segundo con siete y el tercero con ocho, de las que sólo una de cada llavero abre la puerta del trastero. Se escoge al azar un llavero y, de él una llave para abrir el trastero. Se pide:

a) ¿Cuál será la probabilidad de que se acierte con la llave?

b) ¿Cuál será la probabilidad de que el llavero escogido sea el tercero y la llave no abra?

c) Y si la llave escogida es la correcta, ¿cuál será la probabilidad de que pertenezca al primer llavero A?

8.- De un grupo de personas sabemos que el 60% están casadas. Entre las personas casadas, el 80% tiene trabajo y, por otro lado, el 10% de las personas solteras está en el paro.

a) Si una persona elegida al azar tiene trabajo, ¿Cuál es la probabilidad de que esté casada?

b) Entre las personas que están en paro, ¿Cuál es el porcentaje de personas que están solteras?

7. BINOMIAL y NORMAL

1.- Un tratamiento contra una enfermedad produce mejoría en el 80% de los pacientes a los que se aplica. Se suministra a 5 pacientes y se pide:
a) Probabilidad de que mejoren los 5.

b) Probabilidad de que al menos mejoren 3.

c) Probabilidad de que mejore alguno.

d) ¿Cuántos pacientes se espera que mejoren?

2.- De acuerdo con la revista *Chemical Engineering Progress* (noviembre 1990), aproximadamente el 30% de todos los fallos en las plantas químicas son ocasionadas por errores del operador.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que de 20 fallos en una planta química, exactamente 5 se deban a errores del operador?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más fallos de 20 encontrados en una planta química se deban a errores del operador?

3.- Un examen tipo test tiene 10 preguntas, cada una con cuatro respuestas, sólo una de las cuales es correcta.

Parte del examen se filtró entre el alumnado y por ello conocen la respuesta correcta a 5 de las preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de que se responda correctamente a más de 5 preguntas?

4.- Un tratamiento contra una enfermedad produce mejoría en el 80% de los pacientes a los que se aplica. Se suministra a 5 pacientes y se pide:

a) Probabilidad de que mejoren los 5.

b) Probabilidad de que al menos mejoren 3.

c) Probabilidad de que mejore alguno.

d) ¿Cuántos pacientes se espera que mejoren?

5.- Las tallas de 800 recién nacidos se distribuyen normalmente con una media de 66 cm y una desviación típica de 5. Calcular cuántos recién nacidos cabe esperar con tallas comprendidas entre 65 y 70 cm.

6.- En un examen a un gran número de estudiantes, se comprobó que las calificaciones obtenidas correspondían razonablemente a una distribución normal con calificación media de 6 y desviación típica de 1. Elegido al azar un estudiante, calcula la probabilidad de que su calificación esté comprendida entre 6’7 y 7’1.

7.- El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una ley N(200,50). Se extrae una al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso no exceda los 175 gramos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso exceda los 230 gramos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso esté comprendido entre 175 y 230 gramos?