NUMEROS COMPLEJOS:

Recordar los conjuntos de Números:

N, de los Naturales: 0,1,2,3,4,...

Z, de los enteros: ...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...

Q, de los racionales: números obtenidos con fracciones de los anteriores.

I, de los irracionales: Raíces de los anteriores.

R, de los reales, que es la unión de todos ellos, con los que se llenan todas las posiciones desde $-\infty$ hasta ∞.

Vamos a ver con un ejemplo, dónde pueden aparecer los números complejos. En la resolución de la siguiente ecuación de 2º grado:

$$x^2-4x+5=0 \Rightarrow \begin{array}{l} x=\dfrac{4+\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{4+\sqrt{4}\sqrt{-1}}{2}=\dfrac{4+\sqrt{4}i}{2}=\dfrac{4+2i}{2}=2+i \\ x=\dfrac{4-\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{4-\sqrt{4}\sqrt{-1}}{2}=\dfrac{4-\sqrt{4}i}{2}=\dfrac{4-2i}{2}=2-i \end{array}$$

aparecen raíces de números negativos, que para simplificar buscamos la forma de expresarlas en función de la unidad imaginaria i. Este tipo de números son los números complejos, que vamos a ver las propiedades a partir de aquí.

FORMAS DE EXPRESAR UN NUMERO COMPLEJO:

FORMA BINOMICA:

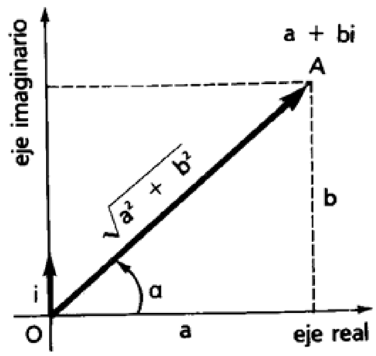
$z_1 = 2+i$ y $z_2 = 2-i$; son dos números complejos en forma binómica.

En general: un complejo en forma binómica es de la forma $z = a+bi$, donde a es la parte real; b es la parte imaginaria e i es la unidad imaginaria.

Si a = 0, se dice que el número complejo es imaginario puro, y si b = 0 se dice que tenemos un nº real puro. Según esto notar que el conjunto R de los números reales es un subconjunto del conjunto C de los números complejos.

Representación gráfica de un número complejo:

Si bien para representar un nº Real basta un eje, normalmente el horizontal, para los complejos es necesario el uso de dos, ya que consta de dos partes diferentes.



Según el dibujo, el punto A se dice que es el afijo del nº complejo y lo representa gráficamente, aunque la forma más usada de representación del nº complejo, es en forma de flecha, de vector, que tiene como punto de aplicación el origen del sistema de referencia y como extremo el afijo del complejo.

Cuando representamos el complejo mediante un un punto, podemos asociarle sus coordenadas, ésta sería la **FORMA CARTESIANA** del nº complejo: (a,b).

El ángulo que forma el eje real positivo con el complejo (vector) se llama argumento (α), y a la longitud de la flecha, módulo (m).

FORMA TRIGOMETRICA:

$$
\begin{aligned}
&Deldibujo: \\
&\quad \cos\alpha = \frac{a}{m} \Rightarrow a = m\cdot\cos\alpha; sen\alpha = \frac{b}{m} \Rightarrow b = m\cdot sen\alpha \\
&Como: \\
&\quad z = a + bi = m\cdot\cos\alpha + m\cdot sen\alpha\cdot i = m(\cos\alpha + i\cdot sen\alpha) \\
&\quad z = m(\cos\alpha + i\cdot sen\alpha)\ \ es la\, forma trigonometrica
\end{aligned}
$$

FORMA POLAR: m_α

Tener en cuenta las relaciones:

$$m = \sqrt{a^2 + b^2}\,;\ \alpha = arctg\,\frac{b}{a}$$

EJEMPLOS DE PASO DE UNAS FORMAS A OTRAS:

$$8_{60^\circ} \Rightarrow (4, 4\sqrt{3})$$
$$2_{225^\circ} \Rightarrow (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$
$$5 + 5\sqrt{3}i \Rightarrow 10_{60^\circ}$$
$$-2 + 2i \Rightarrow 2\sqrt{2}_{135^\circ}$$

POTENCIA DE LA UNIDAD IMAGINARIA:

$$i = \sqrt{-1}$$
$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$
$$1^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

a partir de aquí se repite la serie.

Si el exponente es muy grande, se divide entre cuatro y se toma i elevado al resto:

$$i^{367} = i^3 = -i$$

OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA BINOMICA:

SUMA O DIFERENCIA:

"Se suman o se restan las partes reales entre sí y las partes imaginarias entre sí".

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

PRODUCTO:

"Todo por todo".

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bic + bidi = ac + (ad + bc)i + bdi^2 =$$
$$= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

COCIENTE:

"Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador con la intención de quitar las i (raíces) del denominador".

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-(di)^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=$$
$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=...=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Que es como en todos los casos anteriores otro número complejo en forma binómica.

POTENCIA:

"Se aplica el Binomo de Newton"

BINOMIO DE NEWTON:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}\cdot a^n\cdot b^0+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b^1+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot a^1\cdot b^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot a^0\cdot b^n$$

NUMEROS COMBINATORIOS:

$$\binom{n}{0}=1;\binom{n}{1}=n;\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$
$$\binom{n}{m}=C_{n,m}=\frac{V_{n,m}}{P_m}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)\Rightarrow(m\,productos)}{m!}$$

TRIÁNGULO DE TARTAGLIA:

$$\begin{array}{ccccc} & & \binom{0}{0} & & \\ & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\ \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccccl} & & 1 & & & FILA0 \\ & 1 & & 1 & & FILA1 \\ 1 & & 2 & & 1 & \Rightarrow FILA2 \end{array}$$

El número combinatorio representa la combinación de n elementos tomados de n en n. Combinaciones de 5 elementos tomados de dos en dos es el nº de parejas que puedo formar con 5 personas.

OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR:

PRODUCTO:

Que se crean las fórmulas de las razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos, que demostraremos en el tema de trigonometría:

RAZONES TRIGONOMETRICAS DE LA SUMA Y DIF. DE ANGULOS:

sen(a+b)=sen a·cos b + cos a·sen b

cos(a+b)=cos a·cos b - sen a·sen b

$$\begin{aligned}
&\left[m(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha)\right]\cdot\left[m'(\cos\alpha' + i\,sen\,\alpha')\right] = \\
&= m\cdot m'(\cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\alpha\cdot sen\,\alpha'\cdot i + sen\,\alpha\cdot\cos\alpha'\cdot i + sen\,\alpha\cdot sen\,\alpha'\cdot i^2) = \\
&= m\cdot m'\left[(\cos\alpha\cdot\cos\alpha' - sen\,\alpha\cdot sen\,\alpha') + i\cdot(sen\,\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\alpha\cdot sen\,\alpha')\right] = \\
&= m\cdot m'\left[\cos(\alpha+\alpha') + i\cdot sen(\alpha+\alpha')\right] \\
&m_\alpha\cdot m'_{\alpha'} = m\cdot m'_{(\alpha+\alpha')}
\end{aligned}$$

COCIENTE:

$$\frac{m_\alpha}{m'_{\alpha'}} = \left(\frac{m}{m'}\right)_{\alpha-\alpha'}$$

Demostración:

$$\frac{m_\alpha}{m'_{\alpha'}} = M_\beta \Rightarrow m_\alpha = M_\beta\cdot m'_{\alpha'} = (M\cdot m')_{\beta+\alpha'} \Leftrightarrow \begin{array}{l} m = M\cdot m' \Rightarrow M = \dfrac{m}{m'} \\ \alpha = \beta+\alpha' \Rightarrow \beta = \alpha-\alpha' \end{array}$$

POTENCIA:

$$(m_\alpha)^n = m_\alpha\cdot m_\alpha\cdot m_\alpha\cdot\ldots\cdot m_\alpha = (m\cdot m\cdot m\cdot\ldots\cdot m)_{\alpha+\alpha+\alpha+\ldots+\alpha} = m^n{}_{n\cdot\alpha}$$

RADICACION DE NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR:

$$\sqrt[n]{R_\beta} = r_\alpha \Leftrightarrow R_\beta = (r_\alpha)^n = r^n{}_{n\cdot\alpha} \Rightarrow \begin{array}{l} r^n = R \Rightarrow r = \sqrt[n]{R} \\ \beta = n\cdot\alpha \Rightarrow \beta = n\cdot\alpha + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{\beta+2k\pi}{n} \end{array}$$

$$donde\;\; k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

EJEMPLOS:

$$a)\ \sqrt[3]{8_{0^\circ}} = \sqrt[3]{8}_{\frac{0^\circ+2K\pi}{3}} = \begin{cases} k=1 \Rightarrow 2_{120} \\ k=2 \Rightarrow 2_{0} \\ k=3 \Rightarrow 2_{240} \end{cases} \Rightarrow comprobar\ que \left\{ \begin{matrix} (2_{120})^3 \\ (2_0)^3 \\ (2_{240})^3 \end{matrix} \right\} = 8_{0^\circ}$$

b) Resolver la ecuación: $z^4+1=0$

$$z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1_{180}} = \begin{cases} 1_{45} \\ 1_{135} \\ 1_{225} \\ 1_{315} \end{cases}$$

c) Calcular:

$$\sqrt[4]{-2-2\sqrt{3}i} = hacerlo$$

$$d)\ \sqrt{4} = \sqrt{4_{0^\circ}} \Rightarrow \begin{cases} 2_{0^\circ} = 2 \\ 2_{180^\circ} = -2 \end{cases}$$

Autor: Alberto Pérez Montesdeoca.