EJERCICIO M2BE2255:

$$f(x)=\begin{cases} \ln(x) & \text{si } x\in(0,e) \\ ax+b & \text{si } x\in[e,4) \end{cases}$$

¿Continua y derivable en $(0,4)$?

a) Continuidad:

Si $x\in(0,e)$ $f(x)$ es continua, el $\ln(x)$ a partir de cero, para valores positivos es continuo.

Si $e<x<4$ es continua $f(x)$ ya que independientemente de los valores de a y b es una recta, que es continua.

En $x=e$ será continua si:

$$\lim_{x\to e} f(x)=f(e)$$

Definición de continuidad en un punto

$$\lim_{x\to e^-} f(x)=\lim_{x\to e} \ln(x)=\ln e=1$$

$$\lim_{x\to e^+} f(x)=\lim_{x\to e} ax+b= a\cdot e+b$$

Para que sea continua en $x=e$:

$$\boxed{1=a\cdot e+b}$$

b) Derivabilidad:

¡Lo estudiamos a través de la continuidad de la derivada!

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x\in(0,e) \\ a & \text{si } x\in(e,4) \end{cases}$$

hasta no estar seguros de que es derivable en $x=e$

Si $x \in (0,e)$ es continua la derivada, es decir, $f(x)$ es derivable, ya que la derivada "$\frac{1}{x}$", función racional, no se anula en el dominio $(x \neq 0)$

Si $x \in (e,4)$, $f(x)$ es derivable, al ser la derivada "a" una recta, concretamente es la función constante $(y=a)$.

en $x=e$; la función será derivable si las derivadas laterales en $x=e$ son iguales:

$$\lim_{x \to e^-} f'(x) = \lim_{x \to e} \frac{1}{x} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \to e^+} f'(x) = \lim_{x \to e} a = a$$

será derivable en $x=e$ si

$$\frac{1}{e} = a \Rightarrow 1 = e \cdot a$$

es decir, si $\boxed{a = \frac{1}{e}}$

Como debe ser continua y derivable en $x=e$;

$$1 = a \cdot e + b$$

$$1 = \frac{1}{e} \cdot e + b$$

$$1 = 1 + b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

La función será entonces:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x \in (0, e) \\ \frac{1}{e}x + 0 & \text{si } x \in [e, 4) \end{cases}$$

Cuya representación es la siguiente, donde se observa que es claramente continua, y derivable (no hay cambios bruscos de dirección en el enlace de las dos ramas), sin puntos angulosos en $x = e$.