$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x} & \text{si} \quad x<0 \quad \text{T1}\\ ax+b & \text{si} \quad x\geq 0 \quad \text{T2}\end{cases}$$

TRAMO 1: FUNCIÓN RACIONAL, EN ESTE CASO, CONTINUA Y DERIVABLE CUANDO $X \neq 0$.

TRAMO 2: FUNCIÓN AFÍN, ES CONTINUA Y DERIVABLE EN TODO $\mathbb{R}$.

• ESTUDIAMOS CONTINUIDAD EN $X=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\frac{e^0-e^0}{2\cdot 0}=\frac{0}{0} \text{ (INDETERMINADO)}$$

L'HOPITAL

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-(-e^{-x})}{2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=a\cdot 0+b=b$$

$$\boxed{b=1}$$

$$f(0)=a\cdot 0+b=b$$

$$\boxed{f(x) \text{ ES CONTINUA EN TODO } \mathbb{R} \text{ SI } b=1}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{(e^x-(-e^{-x}))\cdot 2x-(e^x-e^{-x})\cdot 2}{(2x)^2} & \text{si} \quad x<0 \\ a \quad \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{\cancel{2}x(e^x+e^{-x})-\cancel{2}(e^x-e^{-x})}{\cancel{2}\,2x^2} & \text{si} \quad x<0 \\ a \quad \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{xe^x+xe^{-x}-e^x+e^{-x}}{2x^2} & \text{si} \quad x<0 \\ a \quad \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-1)e^x+(x+1)e^{-x}}{2x^2} & \text{si} \quad x<0 \\ a \quad \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

- ESTUDIAMOS DERIVABILIDAD EN $X=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\frac{(0-1)e^0+(0+1)e^{-0}}{2\cdot 0^2}=\frac{0}{0} \quad \text{(INDETERMINADO)}$$

L'HOPITAL

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1e^x+(x-1)e^x+1e^{-x}+(x+1)\cdot(-e^{-x})}{4x}=$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{e^x}+xe^x-\cancel{e^x}+\cancel{e^{-x}}-xe^{-x}-\cancel{e^{-x}}}{4x}=$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}(e^x - e^{-x})}{4\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{4} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = a$$

$$\boxed{a = 0}$$

$f(x)$ ES CONTINUA Y DERIVABLE EN TODO $\mathbb{R}$ si $a = 0$ y $b = 1$