a) $$\begin{cases} ax - ay + 2z = 2a \\ -2x \qquad\quad - az = 2a \\ 2x - 3y + az = -2a \end{cases}$$

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -a & 2 & 2a \\ -2 & 0 & -a & 2a \\ \underbrace{2 \quad -3 \quad a}_{M} & & & -2a \end{array}\right)$$

$$|M| = (0 + 12 + 2a^2) - (0 + 3a^2 + 2a^2) = -3a^2 + 12$$

$$-3a^2 + 12 = 0 \Rightarrow 3a^2 = 12 \Rightarrow a^2 = 4$$

$$\boxed{a = \pm 2}$$

i) Si $a \neq \pm 2$, $|M| \neq 0$.

TEOREMA ROUCHE-FROBENIUS

$\text{Rang}(M) = 3 = \text{Rang}(M^*) =$ nº incógnitas

Según el TRF estamos ante un sistema compatible determinado (1 solución)

ii) Si $a = 2$, $|M| = 0$.

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 & 4 \\ \underbrace{2 \quad -3 \quad 2}_{M} & & & -4 \end{array}\right)$$

$$|M_{2x2}| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$\text{Rang}(M) = 2$$

$$|M^*_{3x3}| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -48 \neq 0$$

$\text{Rang}(M^*) = 3$

$\text{Rang}(M) \neq \text{Rang}(M^*)$, según el TRF estamos ante un sistema incompatible (NO TIENE SOLUCIÓN)

iii) Si $a=-2$, $|M|=0$.

$$M^* = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -2 \end{matrix}}_{M} & \begin{matrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{matrix} \end{array}\right) \qquad |M_{2x2}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$\text{Rang}(M) = 2$

$$|M^*_{3x3}| = \begin{array}{c} \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \end{array} = 0 \qquad \boxed{C_3 = -2C_2}$$

$\text{Rang}(M^*) = 2$

$\text{Rang}(M) = 2 = \text{Rang}(M^*) \neq$ nº incógnitas $= 3$

Según el TRF estamos ante un sistema compatible indeterminado. (INFINITAS SOLUCIONES)

b) Si $a=-2 \Longrightarrow$ Sist. Comp. indet.
(∞ soluciones)

$$\begin{cases} -2x+2y+2z=-4 & E_1 \\ -2x+2z=-4 & E_2 \\ \cancel{2x-3y-2z=4} & E_3 \end{cases}$$

$x=t \; ; \; t\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2y+2z=-4+2t \\ 2z=-4+2t \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{r} 2y+2\cancel{z}=-4+2\cancel{t} \\ -2\cancel{z}=\cancel{4}-2t \\ \hline 2y \quad =0 \\ y=0 \end{array}$$

$$z=\frac{-4+2t}{2}$$

$$z=-2+t$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} x=t & \\ y=0 & t\in\mathbb{R} \\ z=-2+t & \end{array}}$$