$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2+bx & \text{si } x<1 \quad (i)\\ a+\ln(x) & \text{si } x\geq 1 \quad (ii)\end{cases}$$

(i) FUNCIÓN POLINÓMICA, POR TANTO, CONTINUA Y DERIVABLE EN TODO $\mathbb{R}$. $(x<1)$

(ii) FUNCIÓN LOGARÍTMICA, CONTINUA Y DERIVABLE SI $x>0$. $(x\geq 1)$

ESTUDIAR CONTINUIDAD EN $x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} f(x)=(1-1)^2+b\cdot 1=b\\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=a+\ln(1)=a\\ f(1)=a\end{array}\right\}\ f(x) \text{ ES CONTINUA SI } a=b$$

$$f'(x)=\begin{cases}2(x-1)+b & \text{si } x<1\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x>1\end{cases}$$

ESTUDIAR DERIVABILIDAD EN $x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} f'(x)=2(1-1)+b=b\\ \lim_{x\to 1^+} f'(x)=\dfrac{1}{1}=1\end{array}\right\}\ b=1 \Rightarrow a=1$$

$\boxed{\text{SI } a=b=1,\ f(x) \text{ EN CONTINUA Y DERIVABLE EN TODO } \mathbb{R}.}$