EJERCICIO M1BE2491:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-1 & si\ x\leq 1 \\ 2bx-2 & si\ x>1 \end{cases}$$

Continua y derivable ¿a y b?

Estudio de la continuidad:

Si $x<1$, independientemente de los valores de a y b, la función es continua, ya que es una parábola (función cuadrática, polinomio de segundo grado)

Si $x>1$, independientemente de los valores de b, la función es continua, ya que es una recta (función polinómica de primer grado, función afín)

En $x=1$; punto que falta en este análisis de la continuidad, $f(x)$ será continua si en ese punto se cumple la definición de continuidad, que es: que en ese punto

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$$

Para que exista la primera parte de la igualdad $\left(\lim_{x\to 1} f(x)\right)$ tienen que existir y coincidir los límites laterales en ese punto, esto es: $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$

y a su vez coincidir con el valor de la función en ese punto, que tiene por lo tanto que estar definida $[f(1)]$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} ax^2+bx-1 = a+b-1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} 2bx-2 = 2b-2$$

Por lo tanto: $a+b-1=2b-2$

$$\boxed{a-b=-1}$$ para que coincidan los límite laterale

Notar como que al estar la función definida en $x=1$, a la izquierda ($x\leq 1$) el valor de $f(1)$ coincide con el límite por la izquierda.

$$f(1) = a\cdot 1^2+b\cdot 1-1 = a+b-1$$

Estudio de la derivabilidad:

"Lo realizaremos estudiando la continuidad de la derivada"

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax+b & \text{si } x<1 \\ 2b & \text{si } x>1 \end{cases}$$ (*) Notar que no ponemos el "="

(*) No indicamos el "=" ya que a menos que la función sea derivable en ese punto, estaríamos dando por supuesto que lo es.

Si $x<1$ la función es derivable, ya que la derivada es continua, por ser una recta (polinómica de primer grado), independientemente del valor de a y b.

Si $x>1$ $f(x)$ es derivable, ya que $f'(x)$ es la función constante, independientemente del valor de b.

Para que sea derivable en $x=1$, las derivadas laterales tienen que coincidir en $x=1$

$$f'(1)^- = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2a\cdot 1 + b = 2a+b$$

$$f'(1)^+ = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2b$$

para que coincidan: $2a+b=2b$

$$\boxed{2a-b=0}$$

Por lo tanto, para que sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} a-b&=-1 \\ 2a-b&=0 \end{aligned}\right\}$$

$$-a=-1 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

$$1-b=-1$$

$$-b=-2 \Rightarrow \boxed{b=2}$$