EJERCICIO M2BE3220:

"achimagec.com"

$$f(x)=\begin{cases} x^2-6x+11 & \text{si } 0\le x<2 \\ \dfrac{9}{\sqrt{5x-1}} & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

f(x) es concentración residual

a) Confirmar que f(x) es continua:

Si $0<x<2$ f(x) es continua, es una función polinómica, cuadrática, parábola.

Si $x>2$, el radicando no se anula y además es positivo, con lo que en este tramo es en consecuencia f(x) continua.

Faltaría en $x=2$, que será continua si

$$\boxed{\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)}$$ ← Definición de continuidad en un punto

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2-6x+11 = 2^2-6\cdot 2+11 = 3$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = \frac{9}{\sqrt{5\cdot 2-1}} = \ldots = 3$$

En consecuencia, al ser iguales los límites laterales, ese será el valor del límite:

$$\boxed{\lim_{x\to 2} f(x) = 3}$$

Cumple la condición de continuidad en $x=2$.

$$\boxed{f(2)=\frac{9}{\sqrt{5\cdot 2-1}}=3}$$

f(x) es continua en su dominio $[0,+\infty)$

b) Comprobar que la velocidad de crecimiento instantánea a las 3 horas es $> -0{,}5$ mg/L/h

¡La velocidad de crecimiento instantánea es la derivada en el punto!

Para $x=3$; $f(x) = \dfrac{9}{\sqrt{5x-1}} = 9\cdot(5x-1)^{-1/2}$

$$f'(x) = 9\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 5\cdot(5x-1)^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{45}{2}(5x-1)^{-3/2}$$

$$f'(x) = \frac{-45}{2\sqrt{(5x-1)^3}}$$

$$f'(3) = \frac{-45}{2\sqrt{(5\cdot 3-1)^3}} = \boxed{-0{,}4295 > -0{,}5}$$

c) ¿La concentración disminuye?
Instante en que la concentración es máx:

La derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-6 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ \dfrac{-45}{2\sqrt{(5x-1)^3}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estudiamos la monotonía:

$\boxed{\text{Si } 0 < x < 2}$ $\Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$
(no se anula), no hay máx ni mínimo de cero a dos.

Además, de cero a dos, $f'(x)$ siempre es negativa $\Rightarrow$ $f(x)$ decreciente si $[0,2)$

$\boxed{\text{Si } x > 2}$ $\dfrac{-45}{2\sqrt{(5x-1)^3}} \neq 0 \Rightarrow$ Sin solución

No se anula, igualmente decreciente (negativa)

$f'(x)$ no se anula, siempre es negativa, es siempre decreciente, su valor máximo estará al inicio, en $x=0$

$$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 11 = 11 \text{ mg/l}$$

d) Pasado un largo periodo de tiempo, ¿cuál es la concentración del medicamento?

La herramienta es el ¡$\lim_{x \to \infty} f(x)$!

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \dots = 0$$

¡La concentración será 0 mg/L!