

EJERCICIO M2BE3222:

"achimages.com"

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$$

a) Rango de A según k

b) Para $k = -1 \Rightarrow$ b.1) $A^2 = 2A - J$

b.2) $A^4 = 4A - 3J$

a) Rango de A :

$$R(A) \leq 3; \text{ será 3 si } |A| \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{vmatrix} = 5k^2 + 16 + 16 + 8k + 8k - 20 = 5k^2 + 16k + 12$$

$$5k^2 + 16k + 12 = 0$$

$$k = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12}}{2 \cdot 5} = \frac{-16 \pm \sqrt{16}}{10} \rightarrow \begin{cases} k = -\frac{6}{5} \\ k = -2 \end{cases}$$

Si $k = -\frac{6}{5}$ ó $k = -2$ el $R(A)$ no es 3

Veamos si es 2 o incluso superior:

Si $k = -\frac{6}{5} \Rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -\frac{6}{5} & 1 \\ -4 & 4 & -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$

El menor señalado:

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -\frac{6}{5} \end{vmatrix} = \frac{-30}{5} + 8 \neq 0$$

Por lo tanto, si $k = -\frac{6}{5} \Rightarrow R(A) = 2$

Si $k = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

El menor señalado:

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 8 \neq 0$$

Por lo tanto, si $k = -2 \Rightarrow R(A) = 2$

5) Para $k = -1 \Rightarrow A^2 = 2A - I$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} =$$

$3 \times 3 \qquad \qquad 3 \times 3$

$$= \begin{pmatrix} 25 - 8 - 8 & -20 + 4 + 8 & 10 - 4 - 2 \\ 10 - 2 - 4 & -8 + 1 + 4 & 4 - 1 - 1 \\ -20 + 8 + 4 & 16 - 4 - 4 & -8 + 4 + 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$2A - I = ?$

← Son iguales

$$2A - I = 2 \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Se comprueba la igualdad

5.2) ¿ $A^4 = 4A - 3J$? *✓ del apartado anterior*

$$\begin{aligned} A^4 &= A^2 \cdot A^2 = (2A - J)(2A - J) = \\ &= 4A^2 - 2A \cdot J - J \cdot 2A + J^2 = \\ &= 4A^2 - 2A - 2A + J = \\ &= 4(2A - J) - 4A + J = \\ &= 8A - 4J - 4A + J = \\ &= 4A - 3J \end{aligned}$$

¡ Se comprueba la igualdad!