

EJERCICIO M2B53388:

"achimagec.com"

$$f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{bx}{\sqrt{x+2}} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Hallar a y b para que sea derivable en $\mathbb{R}$

* Para que sea derivable, debe ser continua

Si $x < -1$, $f(x)$ es continua y derivable, es una función cuadrática, independientemente del valor de a

Si $x > -1$, $x+2 > 0$, el radicando es positivo y además distinto de cero, con lo que la función, para cualquier valor de b es continua y también derivable (ver valores de la derivada en este tramo).

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x+a) & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{bx+4b}{2(x+2)\sqrt{x+2}} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{bx}{\sqrt{x+2}}\right)' = \frac{b \cdot \sqrt{x+2} - bx \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{(\sqrt{x+2})^2} = \frac{2b(x+2) - bx}{2\sqrt{x+2}} =$$

$$= \frac{2bx + 4b - bx}{2(x+2)\sqrt{x+2}} = \frac{bx + 4b}{2(x+2)\sqrt{x+2}} = f'(x) \quad (x > -1)$$

Siendo por lo tanto continua y derivable si $x < -1$ y $x > -1$, tendremos que comprobar su continuidad y derivabilidad en $x = -1$

CONTINUIDAD EN $x = -1$

En $x = -1$ será continua si:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+a)^2 = \boxed{(-1+a)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x}{\sqrt{x+2}} = \boxed{-6}$$

Para que sea continua en $x = -1$

$$(1) \quad \boxed{(-1+a)^2 = -6}$$

DERIVABILIDAD EN $x = -1$:

Para que sea derivable en $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x)$$

y ese será el valor de $f'(-1)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} 2(x+a) = 2(-1+a) = \boxed{-2+2a}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x+46}{2(x+2)\sqrt{x+2}} = \frac{-6+46}{2(-1+2)\sqrt{1}} = \boxed{\frac{36}{2}}$$

Para que sea derivable en $x = -1$

$$(2) \quad \boxed{-2+2a = \frac{36}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 (1) & \quad (-1+a)(-1+a) = -6 \\
 (2) & \quad \begin{cases} 1-a-a+a^2 = -b \Rightarrow 1-2a+a^2 = -b \\ -4+4a = 3b \Rightarrow b = \frac{-4+4a}{3} \end{cases} \quad \text{SIST.}
 \end{aligned}$$

$$1-2a+a^2 = -\frac{-4+4a}{3}$$

$$3-6a+3a^2 = 4-4a$$

$$3a^2-2a-1=0 \quad \begin{matrix} \nearrow a=1 \\ \searrow a=-\frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$\text{Si } a=1; \quad b = \frac{-4+4 \cdot 1}{3} = 0$$

$$\text{Si } a=-\frac{1}{3}; \quad b = \frac{-4+4 \cdot (-\frac{1}{3})}{3} = \frac{-4-\frac{4}{3}}{3} = -\frac{16}{9}$$

Sea Seivable en $\mathbb{R}$ n.º:

$$a=1 \text{ y } b=0$$

o n.º

$$a=\frac{1}{3} \text{ y } b=-\frac{16}{9}$$