

EJERCICIO 42BE3445:

"achiimages.com"

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) Comprobar si $M = 2I_3 + B^t$ tiene inversa
b) $2X + C = A - X \cdot B^t$

a) $M = 2I_3 + B^t$

$$B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = M$$

M tiene inversa si $|M| \neq 0$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 + 0 - 1 + 0 + 0 = 1 \neq 0$$

M tiene inversa!

b) Ecuación matricial:

$$2X + C = A - X \cdot B^t$$

$$2X + X \cdot B^t = A - C$$

$$X(2I_3 + B^t) = A - C$$

necesario, ya que hay que sumársela a B^t
y tenerla que repetirse que $2X$ es el
doble de la matriz X .

$$2 \cdot X = 2 \cdot I_3 \cdot X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{duplica } X} \cdot X$$

$$X(2J_3 + B^t) = A - C$$

$$X \cdot \underbrace{(2J_3 + B^t)}_{J_3} \underbrace{(2J_3 + B^t)^{-1}} = (A - C) \underbrace{(2J_3 + B^t)^{-1}}$$

$$X = (A - C) \cdot (2J_3 + B^t)^{-1}$$

Hemos visto en el apartado a) que $2J_3 + B^t = M$ tiene inversa, con lo cual se justifica que existe X

Calculamos $(2J_3 + B^t)^{-1} = M^{-1}$ siendo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{(M^t)^{Adj}}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{Adj}}{1} =$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M^{-1}$$

$$A - C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A - C$$

$$X = (A - C) \cdot \underbrace{(2I_3 + B^t)^{-1}}_{H^{-1}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}} = X$$