M2BP229

VECTORES Y RECTAS

MAT 2BACC

GEOMETRIA

APLICACIONES DE LOS VECTORES:

VECTOR QUE UNE DOS PUNTOS:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_0, y_0, z_0) \\ B(x_1, y_1, z_1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{AB} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

MÓDULO DEL VECTOR (DISTANCIA DE DOS PUNTOS:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_0, y_0, z_0) \\ B(x_1, y_1, z_1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO AB:

$$\left.\begin{array}{l} A(x_0, y_0, z_0) \\ B(x_1, y_1, z_1) \end{array}\right\} \Rightarrow m_{AB} = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{z_0 + z_1}{2}\right)$$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \\ \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES:

$$\vec{v} \times \vec{v}' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

VECTOR PERPENDICULAR A OTRO:

$$\vec{d} = (a, b, c) \Rightarrow \perp \vec{d} = (-b, a, 0)$$

RECTAS:

ECUACIÓN DE LA RECTA EN FORMA VECTORIAL: $(x, y, z) = (p_x, p_y, p_z) + \lambda(d_x, d_y, d_z)$

$$P(p_x, p_y, p_z)$$
$$\vec{d}(d_x, d_y, d_z)$$

PARAMÉTRICAS:

$$\left.\begin{array}{l} x = p_x + \lambda d_x \\ y = p_y + \lambda d_y \\ z = p_z + \lambda d_z \end{array}\right\}$$

CONTÍNUA: $\dfrac{x - p_x}{d_x} = \dfrac{y - p_y}{d_y} = \dfrac{z - p_z}{d_z}$

ECUACIÓN DE LA RECTA EN FORMA IMPLÍCITA (INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS):

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d = 0 \end{array}\right\}$$

M2BP230

PLANOS Y MÉTRICA

MAT 2BACC

GEOMETRIA

PLANOS

ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO: $(x,y,z)=\left(p_x,p_y,p_z\right)+\lambda\left(u_x,u_y,u_z\right)+\mu\left(v_x,v_y,v_z\right)$

$P\left(p_x,p_y,p_z\right)$ *es un punto del plano*

$\vec{u}\left(u_x,u_y,u_z\right),\vec{v}\left(v_x,v_y,v_z\right)$ *son vectores en el plano, no paralelos entre sí*

ECUACIONES PARAMÉTRICAS DEL PLANO:

$$\left.\begin{array}{l} x=p_x+\lambda v_x+\mu u_x \\ y=p_y+\lambda v_y+\mu u_y \\ z=p_z+\lambda v_z+\mu u_z \end{array}\right\}$$

ECUACIÓN DEL PLANO EN FORMA IMPLÍCITA: $\begin{vmatrix} u_x & v_x & x-p_x \\ u_y & v_y & y-p_y \\ u_z & v_z & z-p_z \end{vmatrix}=0$

ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO: $ax+by+cz+d=0$

ECUACIÓN NORMAL DEL PLANO:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{n}=(a,b,c)\Leftrightarrow\vec{n}\perp\pi \\ P=(p_x,p_y,p_z) \end{array}\right\}\Rightarrow a(x-p_x)+b(y-p_y)+c(z-p_z)=0$$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES: $\vec{v}\cdot\vec{v}\,'=\left(a,b,c\right)\cdot\left(a',b',c'\right)=a\cdot a'+b\cdot b'+c\cdot c'$

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES: $\vec{v}\times\vec{v}\,'=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO:

$$\begin{array}{l} \pi\equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ P(x_0,y_0,z_0) \end{array} \quad \Rightarrow \quad d(\pi,P)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

ANGULO ENTRE DOS RECTAS: (de las rectas conocemos sus directores $\vec{d}$ y $\vec{d'}$)

$$\cos\alpha=\frac{\left|\vec{d}\cdot\vec{d'}\right|}{\left|\vec{d}\right|\left|\vec{d'}\right|}$$

ANGULO ENTRE RECTA Y PLANO: (de la recta conocemos su director $\vec{d}$, y del plano su normal $\vec{n}$)

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\left|\vec{d}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{d}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$$

también con el coseno, pero el ángulo sería: 90-ángulo

M2BP233

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS (DOS MÉTODOS)

MAT 2BACC

GEOMETRIA

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS MEDIANTE RANGOS:

$\overrightarrow{d_r}(r_1, r_2, r_3)$ es un director de r

$\overrightarrow{d_s}(s_1, s_2, s_3)$ es un director de s

$\overrightarrow{PP'}(p'_1 - p_1, p'_2 - p_2, p'_3 - p_3)$ vector del punto P de s, a P' de s

$$M = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ p'_1 - p_1 & p'_2 - p_2 & p'_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

$$r(M) = 1 \Rightarrow \begin{cases} r(M') = 1 \Rightarrow COINCIDENTES \\ r(M') = 2 \Rightarrow PARALELAS \end{cases}$$

$$r(M) = 2 \Rightarrow \begin{cases} r(M') = 2 \Rightarrow SE\ CORTAN \\ r(M') = 3 \Rightarrow SE\ CRUZAN \end{cases}$$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS MEDIANTE PUNTOS Y VECTORES:

Si $\overrightarrow{d_r}$ *y* $\overrightarrow{d_s}$ *son Linealmente dependientes (proporcionales)*
podrían ser paralelas o coincidentes
elijo un punto P de r y lo sustituyo en s, si pertenece P a s, serían COINCIDENTES
si no pertenece, PARALELAS.

Si $\overrightarrow{d_r}$ *y* $\overrightarrow{d_s}$ *NO son Linealmente dependientes (no son proporcionales)*
podrían cortarse en un punto o cruzarse.
elijo un punto P de r y un P' de s, que determinan *un vector* $\overrightarrow{PP'}$
construyo el determinante:

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{d_r} \\ \overrightarrow{d_s} \\ \overrightarrow{PP'} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} si\ \det = 0 \Rightarrow \text{r y s SE CORTAN} \\ si\ \det \neq 0 \Rightarrow \text{r y s SE CRUZAN} \end{cases}$$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS MEDIANTE RANGOS:

Los planos expresados mediante su ecuación en forma general:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\overrightarrow{n_\pi}=(A,B,C) \\ \overrightarrow{n_{\pi'}}=(A',B',C')\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C'\end{pmatrix} \\ M'=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D'\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r(M)=1 \Rightarrow \begin{cases} r(M')=1 \Rightarrow COINCIDENTES \\ r(M')=2 \Rightarrow PARALELOS \end{cases} \\ r(M)=2 \Rightarrow \{ r(M')=2 \Rightarrow SE\ CORTAN\ EN\ UNA\ RECTA \end{array}$$

POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ \pi'' \equiv A''x+B''y+C''z+D''=0\end{array}\right\}$$

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C''\end{pmatrix} ;\ M'=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D''\end{pmatrix}$$

$Si\ R(M)=R(M')=3; SE\ CORTAN\ EN\ UN\ PUNTO$

$Si\ R(M)=R(M')=n<3;$

analizarlo teniendo en cuenta la compatibilidad del sistema.

$Si\ R(M) \neq R(M')$;Sistema incompatible

Determinan una superficie prismática (se cortan dos a dos), paralelos...

POSICIONES RELATIVAS DE RECTA Y PLANO:

De la ecuación del plano, obtenemos un vector normal a él: $\overrightarrow{n_\pi}$

De la ecuación de la recta, obtenemos su director: $\overrightarrow{d_r}$

- Si $\overrightarrow{n_\pi}$ es perpendicular a $\overrightarrow{d_r}$: es decir $\Rightarrow$ $\overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{d_r}=0$
  - El plano y la recta son paralelos
    - Se busca un punto P de la recta y se comprueba que $P \notin \pi$
  - La recta está contenida en el plano
    - Se busca un punto P de la recta y se comprueba que $P \in \pi$
- Si $\overrightarrow{n_\pi}$ no es perpendicular a $\overrightarrow{d_r}$: es decir $\Rightarrow$ $\overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{d_r} \neq 0$
  - El plano y la recta se cortan en un punto:
    - Para calcularlo, se resuelve el sistema plano-recta.
    - El ángulo que determinan plano y recta:

$$sen\alpha = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|} \Rightarrow$$ también con el coseno, pero el ángulo sería $(90-\alpha)$