

Dado el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} y + z &= 1 \\ (m-1)x + y + z &= m \\ x + (m-1)y - z &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &a) \text{ Discutir según } m \\ &b) \text{ Resolverlo para } m=2 \end{aligned}$$

a) Discusión:
¿Rango A?

$$\begin{array}{c} A \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 & 0 \end{array} \right) \\ A^* \end{array}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + (m-1)^2 - 1 + m-1 = \\ &= (m-1)^2 + m-1 = \\ &= m^2 - 2m + 1 + m - 1 = m^2 - m \end{aligned}$$

$$m^2 - m = 0 \Rightarrow m(m-1) = 0 \begin{cases} \rightarrow m=0 \\ \rightarrow m=1 \end{cases}$$

Si $m=0$ ó $m=1 \Rightarrow R(A) < 3$

(I) Si $m \neq 0$ ó $m \neq 1 \Rightarrow R(A) = R(A^*) = 3$
Según Teorema de Rouché-Frobenius el Sistema es Compatible Determinado (Solución única)

(II) Si $m=0$

$$\begin{array}{c} A^* \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \\ A \end{array} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$R(A) < 3$
 $R(A) = 2$

$$\begin{array}{c} A \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \end{array} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow R(A^*) = 2$$

Si $u=0 \Rightarrow R(A)=R(A^*)=2 < n$ i.e. infinitas
Sistema compatible Indeterminado
Infinitas soluciones

(III) Si $u=1$

$\hat{R}(A)?$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & \xrightarrow{A} & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & (1) \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & (2) \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{0} & \\ & \xleftarrow{A^*} & & \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R(A)=2$$

$\hat{R}(A^*)? \Rightarrow R(A^*)=2 \Rightarrow$ se observa que en este caso las filas (1) y (2) son iguales

Si $u=1 \Rightarrow R(A)=R(A^*)=2$, sistema compatible indeterminado también

b) Resuelve para $u=2$: "Sist. Comp. Det"

$$\begin{cases} (1) & y+z=1 \\ (2) & x+y+z=2 \\ (3) & x+y-z=0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x+y+z=2 \\ + \\ -x-y+z=0 \\ \hline 2z=2 \Rightarrow \boxed{z=1} \end{array}$$

De (1) $y+z=1 \Rightarrow y+1=1 \Rightarrow \boxed{y=0}$

De (2) $x+y+z=2 \Rightarrow x+0+1=2 \Rightarrow \boxed{x=1}$

Solución (1, 0, 1)